

Шәкір Айдос 

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

9-дәріс. Параболалық теңдеулер. Жылуөткізгіштік теңдеу үшін бастапқы-шеттік (шектеулі аймақ) есепті Фурье әдісімен шешу.

Дәрістің мақсаты – параболалық типті теңдеуге жататын жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бастапқы шеттік есепті Фурье әдісімен шешу

Негізгі сұрақтар:

1. Біртекті жылуөткізгіштік теңдеу үшін бастапқы-шеттік есеп.
2. Біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеу үшін бастапқы-шеттік есеп

1 Біртекті жылуөткізгіштік теңдеу үшін бастапқы-шеттік есеп

Бір өлшемді жылуөткізгіштік теңдеуін қарастырайық:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

мұндағы $u(x, t)$ — температура, $\alpha > 0$ — жылуөткізгіштік коэффициенті.

Бастапқы шарт:

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (1.2)$$

Шеттік шарттар (мысалы, Дирихле типі):

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.3)$$

2 Шешудің Фурье әдісімен шығару жолы

2.1 Бөлшектеу әдісі

Шешімді айнымалыларды ажырату әдісі бойынша іздейміз:

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Теңдеуге (1.1) қойсақ:

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t) \implies \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

мұндағы λ — бөлшектеу тұрақтысы.

2.2 Шекті теңдеулер

Кеңістік бөлігі:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0.$$

Бұл классикалық Штурм-Лиувиль теңдеуі. Оның шешімі:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Уақыт бөлігі:

$$T'_n(t) + \alpha^2 \lambda_n T_n(t) = 0 \implies T_n(t) = e^{-\alpha^2 \lambda_n t}.$$

2.3 Жалпы шешім

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}.$$

Коэффициенттер B_n бастапқы шарттан табылады:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \implies B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

3 Қорытынды

Біртекті жылуөткізгіштік теңдеудің бастапқы-шеттік есебі Фурье қатарлары арқылы шешіледі. Алынған шешім:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}.$$

4 Біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеу үшін бастапқы-шеттік есеп

Бір өлшемді біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеуін қарастырайық:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (4.1)$$

мұндағы $u(x, t)$ — температура, $\alpha > 0$ — жылуөткізгіштік коэффициенті, $F(x, t)$ — сыртқы жылу көзі немесе біртекті емес бөлік. Бастапқы шарт:

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (4.2)$$

Шеттік шарттар (Дирихле типі):

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (4.3)$$

5 Шешудің Фурье әдісімен шығару жолы

5.1 Жіктеу әдісі

Біртекті емес теңдеуді шешу үшін оны біртекті және біртекті емес бөліктерге бөлуге болады:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

мұндағы $v(x, t)$ — біртекті теңдеудің шешімі, $w(x, t)$ — біртекті емес бөлікпен байланысты шешім.

5.2 Біртекті бөлік:

Біртекті теңдеуді шешеміз:

$$v_t = \alpha^2 v_{xx}, \quad v(0, t) = v(L, t) = 0, \quad v(x, 0) = f(x).$$

Бұның шешімі Фурье қатарлары арқылы:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t},$$

мұндағы

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

5.3 Біртекті емес бөлік:

Біртекті емес бөлік үшін:

$$w_t = \alpha^2 w_{xx} + F(x, t), \quad w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad w(x, 0) = 0.$$

Фурье әдісін қолдансақ:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

онда коэффициенттер $W_n(t)$ келесі интегралдық теңдеуді қанағаттандырады:

$$W'_n(t) + \alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 W_n(t) = F_n(t), \quad W_n(0) = 0,$$

мұндағы

$$F_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L F(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Бұл қарапайым бірінші ретті ЖДТ, шешімі:

$$W_n(t) = \int_0^t e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (t-s)} F_n(s) ds.$$

5.4 Жалпы шешім

Соңында жалпы шешім:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[B_n e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} + \int_0^t e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (t-s)} F_n(s) ds \right].$$

6 Қорытынды

Біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеудің бастапқы-шеттік есебі Фурье қатарлары және Дюамель принципі арқылы шешіледі.

7 Біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеу үшін бастапқы-шеттік есеп: Мысал және толық шешімі

Бір өлшемді біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеуді қарастырайық:

$$u_t = u_{xx} + \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (7.1)$$

бастапқы шарт:

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (7.2)$$

шеттік шарттар (Дирихле типі):

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (7.3)$$

8 Шешудің Фурье әдісімен шығару жолы

8.1 Біртекті емес бөлік

Фурье әдісін қолданамыз. Біртекті емес бөлік:

$$F(x, t) = \sin(\pi x)$$

деп алсақ, шешімді Фурье синус сериясы түрінде іздейміз:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) \sin(n\pi x).$$

8.2 Фурье коэффициенттерін табу

$$W'_n(t) + (n\pi)^2 W_n(t) = F_n, \quad W_n(0) = 0,$$

мұндағы

$$F_n = 2 \int_0^1 \sin(\pi x) \sin(n\pi x) dx.$$

Синус функцияларының ортогоналдылығы бойынша:

$$F_n = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n \geq 2. \end{cases}$$

8.3 ЖДТ шешімі

$n=1$ үшін:

$$W'_1(t) + (\pi)^2 W_1(t) = 1, \quad W_1(0) = 0.$$

Бұл қарапайым бірінші ретті сызықты ОДУ. Ерекше шешімі:

$$W_1(t) = \frac{1}{\pi^2} (1 - e^{-\pi^2 t}).$$

Барлық басқа $n \geq 2$ үшін $F_n = 0$, сондықтан $W_n(t) = 0$.

8.4 Жалпы шешім

Сондықтан толық шешім:

$$u(x, t) = \frac{1 - e^{-\pi^2 t}}{\pi^2} \sin(\pi x).$$

9 Қорытынды

Біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеудің бастапқы-шеттік есебі Фурье әдісімен шешіледі. Мұндағы маңызды қадамдар:

- Біртекті емес функцияны Фурье синус сериясына жіктеу;
- Әрбір Фурье коэффициентіне қатысты қарапайым бірінші ретті ОДУ шешу;
- Барлық n бойынша қосып, толық шешім алу.

Студенттерге қосымша әрі толыққанды мәліметтер алу үшін [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] әдебиеттер ұсынылады.

Список литературы

- [1] Токибетов Ж.А., Хайруллин Е.М. Математикалық физика теңдеулері. Астана, 2010 ж. 9
- [2] Михлин С.Г. Курс математической физики. М., 1968. 9
- [3] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1984. 9
- [4] Орынбасаров М.О., Оршубеков Н.Ә. Математикалық физика теңдеулері. Алматы, 2009 ж. 9
- [5] Орынбасаров М.О., Сахаев Ш.С. Математикалық физика теңдеулерінің есептері мен жаттығулар жинағы. Алматы, 2009 ж. 9
- [6] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 2006. 9
- [7] Хомпыш Х. Математикалық физика теңдеулері. Алматы, Қазақ Университеті, 2017 ж. 215 б. 9